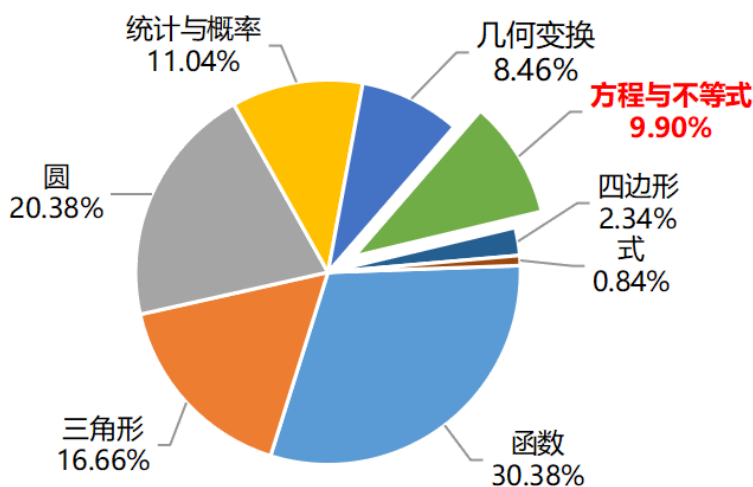


第1讲 一元二次方程基础

一元二次方程属于人教版教材第二十一章的内容，后续也会与二次函数进行综合。本模块《一元二次方程》，重点包括一元二次方程的解法、根系关系及实际应用问题，需要学生在理解概念及解法的基础上，进行实际应用，为后续相关知识的学习奠定基础。

本模块难度适中，适用于基础知识的夯实，本模块为一元二次方程基础、一元二次方程的实际应用2讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
一元二次方程的概念	★★	低
一元二次方程的解法	★★	高
一元二次方程的判别式	★★★	高
一元二次方程的根系关系	★★★★	中
一元二次方程的实际应用	★★★★	高

一、一元二次方程的概念

一元二次方程

一元二次方程概念：只含有_____，并且未知数的最高次数是_____的_____方程，叫做一元二次方程。

一元二次方程的一般式：_____，_____为二次项系数；_____为一次项系数，_____为常数项。

一元二次方程的识别：

- ①一元二次方程是_____方程，即方程的两边都是关于未知数的_____；
- ②一元二次方程是_____方程，即方程中只含有_____未知数；
- ③一元二次方程是_____方程，也就是方程中未知数的最高次数是_____；

特别地，对于方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ：

当 a _____时，为_____方程；当 a _____ b _____时，为_____方程

一元二次方程的解：使方程左右两边_____的未知数的值就是这个一元二次方程的_____，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的_____

🧠 举个“栗”子

栗子1

1. 下列方程中，是一元二次方程的是（ ）。

- A. $3x - 5 = 6(x - 1)$ B. $x^2 - 3y + 1 = 0$ C. $x^2 - 2x - 7 = 0$ D. $\frac{1}{x} = x^2 + 3$

栗子2

2. 关于 x 的方程 $(a - 1)x^2 + \sqrt{a + 1}x + 2 = 0$ 是一元二次方程，则 a 的取值范围是（ ）。

- A. $a \neq 1$ B. $a \geq -1$ 且 $a \neq 1$ C. $a > -1$ 且 $a \neq 1$ D. $a \neq \pm 1$

栗子3

3. 已知关于 x 的一元二次方程 $m(x - h)^2 - k = 0$ (m 、 h 、 k 均为常数且 $m \neq 0$) 的解是 $x_1 = 2$ ， $x_2 = 5$ ，则关于 x 的一元二次方程 $m(x - h + 3)^2 = k$ 的解是（ ）。

- A. $x_1 = 2$ ， $x_2 = 3$ B. $x_1 = 2$ ， $x_2 = 5$ C. $x_1 = 1$ ， $x_2 = 0$ D. $x_1 = -1$ ， $x_2 = 2$

栗子4

4. 若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根为 -1 ，则 () .
 A. $a + b + c = 0$ B. $a - b + c = 0$ C. $-a - b + c = 0$ D. $-a + b + c = 0$
5. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m + 2)x^2 - 3x + m^2 - 4 = 0$ 的一根为 0 ，则 m 的值为 _____ .

栗子5

6. 根据下列表格中二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的自变量 x 与函数值 y 的对应值，判断方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, a, b, c 为常数) 的一个解 x 的范围是 () .

x	6.17	6.18	6.19	6.20
$y = ax^2 + bx + c$	-0.03	-0.01	0.02	0.04

- A. $6 < x < 6.17$ B. $6.17 < x < 6.18$ C. $6.18 < x < 6.19$ D. $6.19 < x < 6.20$

二、一元二次方程的解法

1. 直接开方法

对于方程 $x^2 = p$	当 $p > 0$ 时, $x =$
	当 $p = 0$ 时, $x =$
	当 $p < 0$ 时, $x =$

思考：

对于方程 $(mx + n)^2 = (px + q)^2$ ，可得到 $mx + n =$ _____

栗子6

7. 解下列方程
 (1) $4(x + 1)^2 = 25$.

8. 用适当方法解方程： $(3x - 1)^2 = (x + 1)^2$.

2. 配方法

通过配成完全平方形式来解一元二次方程的方法，叫做**配方法**。

配方是指方程两边都加上_____，使左边配成一个完全平方式

用配方法解一元二次方程的步骤如下：

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a、b、c \text{ 为常数且 } a \neq 0)$$

①移项	
②二次项系数化为1	
③配方	
④开平方	

栗子7

9. 解下列方程：

(1) $x^2 - 2x + 1 = 25$.

(2) $2x^2 - 5x + 1 = 0$.

3. 公式法

公式法是由配方法推导而来

当 Δ _____ 时, 方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的实数根可写为 $x =$ _____ 的形式, 这个式子叫做一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的**求根公式**.

栗子8

10. 用适当的方法解下列方程:

(1) $1 - 2x^2 = 3x$.

4. 因式分解法

解一元二次方程时, 先 _____, 使方程化为 _____ 的形式, 再使这两个一次式分别 _____, 从而 _____, 这种解一元二次方程的方法叫做 _____.

栗子9

11. 用因式分解法解方程.

(1) $x(2x - 5) = 2(2x - 5)$.

(2) $4x^2 - 4x + 1 = (x + 3)^2$.

三、一元二次方程的判别式

一元二次方程 判别式

对于方程 $ax^2 + bx + c = 0$
(a 、 b 、 c 为常数且 $a \neq 0$)，
由配方法可得_____

当 $\Delta =$ _____，方程有_____个_____的实数根

当 $\Delta =$ _____，方程有_____个_____的实数根

当 $\Delta =$ _____，方程_____实数根

栗子10

12. 已知一元二次方程 $x^2 + x - 1 = 0$ ，下列判断正确的是() .

- A. 该方程有两个相等的实数根 B. 该方程有两个不相等的实数根
C. 该方程无实数根 D. 该方程根的情况不确定

栗子11

13. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m - 2)^2 x^2 + (2m + 1)x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围是() .

- A. $m > \frac{3}{4}$ B. $m \geq \frac{3}{4}$ C. $m > \frac{3}{4}$ 且 $m \neq 2$ D. $m \geq \frac{3}{4}$ 且 $m \neq 2$

14. 若关于 x 的方程 $mx^2 - 4x + 1 = 0$ 有实数根，则 m 的取值范围是_____ .

栗子12

15. 已知关于 x 的方程 $x^2 - (2k + 1)x + 4\left(k - \frac{1}{2}\right) = 0$.

(1) 求证：无论 k 为何值时，方程总有两个实数根 .

(2) 若等腰 $\triangle ABC$ 的一边长 $a = 4$ ，另两边 b 、 c 恰好是这个方程的两个实数根，求 $\triangle ABC$ 的周长 .

16. 已知：关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + 2x + 2 - k = 0 (k \geq 1)$.

(1) 求证：方程总有两个实数根 .

(2) 当 k 取哪些整数时，方程的两个实数根均为整数 .

四、一元二次方程的根系关系

一元二次方程的根系关系即**韦达定理**：两个根的和等于一次项系数与二次项系数的比的相反数，两个根的积等于常数项与二次项系数的比 .

即对于方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，当 $\Delta \geq 0$ ，方程两根为 x_1 、 x_2 ，

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

！ 总结：

几个重要变形：

- ① $x_1^2 + x_2^2 = \underline{\hspace{2cm}} ;$
- ② $(x_1 - x_2)^2 = \underline{\hspace{2cm}} ;$
- ③ $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \underline{\hspace{2cm}} ;$
- ④ $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \underline{\hspace{2cm}} .$

栗子13

17. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + (2m + 1) = 0$ 有实数根 .

(1) 求 m 的取值范围 .

(2) 如果方程的两个实数根为 x_1, x_2 , 且 $2x_1x_2 + x_1 + x_2 > 4$, 求 m 的取值范围 .

18. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x - k^2 = 0$ (k 为常数)

(1) 求证 : 方程有两个不相等的实数根 .

(2) 设 x_1, x_2 为方程的两个实数根 , 且 $x_1 + 2x_2 = 14$, 试求出方程的两个实数根和 k 的值 .

栗子14

19. 设 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 + 4x - 3 = 0$ 的两根 , 且 $2x_1(x_2^2 + 5x_2 - 3) + a = 2$, 则 $a =$ _____ .

栗子15

20. 方程 $2x^2 + 3x - 1 = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 , 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值等于 _____ .

21. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 2 = 0$.

(1) 若方程有实数根 , 求实数 m 的取值范围 .

(2) 若方程两实数根分别为 x_1, x_2 , 且满足 $x_1^2 + x_2^2 = 31 + |x_1x_2|$, 求实数 m 的值 .

栗子16

22. 菱形 $ABCD$ 的边长是5, 两条对角线交于 O 点, 且 AO, BO 的长分别是关于 x 的方程 $x^2 + (2m - 1)x + m^2 + 3 = 0$ 的根, 则 m 的值为() .

- A. -3 B. 5 C. 5或-3 D. -5或3

栗子17

23. 设实数 a, b 满足 $3a^2 - 19a + 1 = 0$ 且 $3b^2 + 19b + 1 = 0$, 求 $a + b$ 的值 .

栗子18

24. 已知实数 x_1, x_2 满足 $x_1 + x_2 = 7, x_1x_2 = 12$, 则以 x_1, x_2 为根的一元二次方程是() .

- A. $x^2 - 7x + 12 = 0$ B. $x^2 + 7x + 12 = 0$ C. $x^2 + 7x - 12 = 0$ D. $x^2 - 7x - 12 = 0$

25. 已知 x, y 是正整数, 并且 $xy + x + y = 23, x^2y + xy^2 = 120$, 求 $x^2 + y^2$ 的值 .

独步天下2

26. 已知实数 $a \neq b$, 且满足 $(a + 1)^2 = 3 - 3(a + 1), 3(b + 1) = 3 - (b + 1)^2$, 则 $b\sqrt{\frac{b}{a}} + a\sqrt{\frac{a}{b}}$ 的值为() .

- A. 23 B. -23 C. -2 D. -13